第2卷 第6期　　林业科学研究　　Vol.2, No.6
1989年12月　　FOREST RESEARCH　　Dec., 1989

Richards函数拟合多形地位指数曲线模型的研究

骆期邦　吴志德　蒋菊生　陈定国
(林业部中南林业调查规划设计院)

肖永林　葛宏立
(林业部华东林业调查规划设计院)

摘要　本文以Richards函数为基本模型，讨论了不相交多形地位指数曲线的拟合。解决了标准年龄时树高与指数值不一致的问题；给出了根据树高和年龄求指数的实用迭代公式；探讨了标准年龄不同，指数曲线形状是否会变化的问题；最后讨论了本文所用的杉木多形地位指数曲线模型的一些特性。

关键词　Richards函数；多形地位指数曲线；Marquardt迭代法

当样本资料收集后，要建立一个好的地位指数曲线模型，关键在于选择好数学模型和拟合方法。就建立树高生长过程一类反映生物生长规律的模型而言，一个好的数学模型，不仅要求对样本资料应具有灵活的切合性能，最小的拟合残差和尽可能少的参数，而且其参数应具有生物学意义。从这些基本要求出发，对Richards函数在建立多形地位指数曲线模型中的应用，进行了研究。并根据改进后的8参数Richards函数，分别建立了杉木、马尾松多形地位指数曲线模型，取得了良好效果。本文将就在应用Richards函数中的一些关键技术问题进行探讨：①如何提高其灵活性(Robert A. Monserud 1984年曾指出：简单的Richards函数对多形树高生长曲线的适应性不强[1])；②如何使标准年龄时的树高与地位指数值取得一致；③标准年龄的变化是否使曲线变化，以至影响到使用精度的要求；④如何根据年龄和树高值迅速求得地位指数值。同时对所建模型的特性进行了探讨，取得了良好结果。

一、多形地位指数曲线模型的确立和求解方法

优势高与年龄的关系，可用Richards函数表示：

$$H=f(B,t)=B_0(1-e^{-B_1 t})^{\frac{1}{1-B_2}} \tag{1}$$

t 为年龄，$B=(B_0,\ B_1,\ B_2)$为参数。

优势高除随年龄的增长而增高外，还受以地位指数表示的立地质量好坏的制约，即一个

本文于1989年3月10日收到。

地位指数决定一条树高曲线。而树高曲线(1)是由 B 决定的，因此，一个地位指数，决定一个 B，用下式表示：

$$B=B(S)=[B_0(S),\ B_1(S),\ B_2(S)]$$

S 为地位指数。将此式代入(1)，为

$$H=f[B(S),t]=B_0(S)[1-e^{-B_1(S)t}]^{\frac{1}{1-B_2(S)}}$$

B 与 S 的具体关系，经样本资料分析为非线性相关，故定为：

$$B_0=C_0S^{C_1}\qquad B_1=-(C_2+C_3S+C_4S^2)\qquad B_2=C_5+C_6S+C_7S^2 \tag{2}$$

这里把 B_1、B_2 与 S 的关系定为抛物线，是考虑到 B_1、B_2 的变化不易确定，而抛物线具有较好的适应能力，且形式简单。把(2)代入(1)有

$$H=f(C,S,t)=C_0S^{C_1}[1-e^{(C_2+C_3S+C_4S^2)t}]^{\frac{1}{1-C_5-C_6S-C_7S^2}} \tag{3}$$

$C=(C_0,C_1,\cdots,C_7)$ 为待定参数。当 C 确定后，(3)式就是一个完整的多形地位指数曲线模型，代入不同的地位指数和年龄，便可把(3)展开成多形地位指数表。

为了克服 Trousdell 等人[2](1974)对类似(3)式一类方程用参数预估法求解(各参数值用与地位指数分别建立子模型的方法求出)所带来的一些矛盾，按通常最小二乘法定义，用 Marquardt 迭代法直接求解参数 C。因为在(3)式中 B_0、B_1、B_2 是相互制约的，按(3)式直接求解 C，可使得 B_0、B_1、B_2 自行协调，且便于计算机处理。若先由(1)式求出不同的 B，再由(2)式求 C，这样就把 B_0、B_1、B_2 的关系割裂开来，使得它们不能自行协调，既会增大误差，又增加了计算步骤。用(3)式和直接求解 C 的拟合方法所建立的杉木和马尾松多形地位指数曲线模型，经检验具有很好的切合灵活性，证明 Richards 函数的灵活性可通过参数与地位指数的协调得到提高。

但(3)式尚有 3 个问题需要探讨解决：①当 C 确定后，代入标准年龄和地位指数所求得的树高与地位指数不一致；②当标准年龄改变时，曲线形状是否会变化；③已知树高和年龄如何迅速求得地位指数。

二、标准年龄时树高和地位指数值矛盾的解决

类似(3)式的多形地位指数曲线模型，在拟合方法上不采取特殊处理，常会导致标准年龄时的树高与地位指数不一致。可以认为，标准年龄时的树高与指数一致的 C 是存在的。如求得的 C 不能使它们一致，则这个 C 尚未满足要求。

在求解一元非线性方程的根时，有一种方法是，将所求解的非线性方程 $g(x)=0$ 改写成

$$x=f(x) \tag{4}$$

先给一个初值 x_0，代入(4)式算出 x_1，再将 x_1 作为初值代入(4)式求出 x_2，如此重复，若收敛(即(4)式两边趋于相等，或 x_n-x_{n-1} 趋于 0)，则其极限值 x 为原方程 $g(x)=0$ 的根。仿照这种方法(当然 $g(x)=0$ 的根只是一个或几个点，而地位指数是一个区间。例如最低指数为 6，最高指数为20，在标准年龄时，S 用 6 —20之间的任一数代入，所求得的 H 都应与 S 相等。另外，S 并不是要求的根，要求的根是 C，使 C 满足 S 与 H 一致)。将不同指数值的解析

木树高数据输入，以标准年龄时的树高值作为S_0，按最小二乘法定义，用Marquardt方法求出C，将C代入(3)式，求出标准年龄时的各个树高理论值$\hat{H}_{t0}$，然后计算：

$$L=\max\{|\hat{H}_{t0i}-S_{0i}|\} \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

m为解析木株数，或为按指数归并平均后的数据组数。然后检验

$$l<l_0 \tag{5}$$

是否成立。l_0为允许误差限。限定$\hat{H}_{t0}$与S的误差不影响到第一位小数，本项研究中，取l_0为0.01m。若(5)式不成立，再把$\hat{H}_{t0}$作为新的S_0代入(3)式，按最小二乘法定义重求C，如此重复，直到求得(5)式成立时的C，上述不一致的问题便可得到解决。

如不用剩余方差和Q($Q=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{P_i}(H_{ij}-\hat{H}_{ij})^2$，$P_i$为第$i$株解析木的龄阶数)、相关指数$R$，及理论值$\hat{H}_{ij}$，则计算已可结束，只需将地位指数表打印出来。若需要求得上述数据，则还应计算各解析木的最佳S值。

以上计算的目的，是使$\hat{H}_{t0}$与S一致和Q尽量小。虽然每次计算都是在最小二乘法定义下进行的，但因每次都用了新的指数值，Q值有可能随指数值的更新而增大。因为指数值的不断更新，会使指数值偏离原曲线，从而使Q、R及$\hat{H}_{ij}$产生偏差。因此应重新计算使Q达最小的各S值，而参数C不再变化。现给出一个迭代公式(详细推导可参看第四节)。

计算下面的量，其中$\hat{H}_{ij0}$为与S_{i0}相对应的各龄阶树高理论值。

$$W_i=\sum_{j=1}^{P_i}(H_{ij}-\hat{H}_{ij0})\hat{H}_{ij0}, \quad F_i=\sum_{j=1}^{P_i}(H_{ij}-2\hat{H}_{ij0})\hat{H}_{ij0}$$

用W_i、F_i修正

$$S_{i1}=S_{i0}-S_{i0}\,W_i/F_i \tag{6}$$

若$|S_{i0}\cdot W_i/F_i|<0.01$，则认为第$i$株解析木的$S$已求得，接着计算下株解析木的$S$，否则令新的$S_{i1}=S_{i0}$，进入下次迭代。

三、标准年龄变化时曲线变化情况分析

当标准年龄不同时，地位指数曲线(3)式的形状是否会变化？就理论而言，若无变化，则由(2)式确定的参数B，对同一条指数曲线当标准年龄不同时(即S值不同，同时C值也不同时)，由新的S与C所确定的B值应与原值相同。严格说来这一点不会成立。因而当标准年龄不同时，指数曲线也将产生变动。但这种变化所产生的差异是否大到影响实用？兹引用实例予以分析。其原始数据为南岭中段杉木优势木树干解析资料。数据经合并为13组，标准年龄为20 a。现取标准年龄t_0为16、20、24 a，用(3)式拟合，分别打印出理论值进行比较。限于篇幅，只将13组数据中最小、中等和最大指数值的数据抄录于表1(表中第二列为标准年龄20 a时的地位指数值)。从表中可看出最大变动较差为0.09m，影响到第一位小数(0.1 m)。马尾松材料的计算结果的最大变动较差为0.02 m。这对于实际应用来说是可以接受的。其误差是否完全因t_0的变动而引起也不好定论。但可以肯定，较差中含有处理方法引起的误差。例如在使t_0处的树高与指数一致时，在求使Q达到最小的指数时，都允许有0.01m误差，此

表 1　　**不同标准年龄时的树高曲线值比较**

t_0	指　数	年							龄 (a)							
		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
16	5.94	0.29	0.81	1.44	2.12	2.82	3.50	4.16	4.79	5.38	5.93	6.45	6.92	7.36	7.76	8.12
	13.74	0.55	1.83	3.46	5.22	6.96	8.61	10.12	11.49	12.69	13.75	14.66	15.45	16.13	16.70	17.20
	20.52	1.30	3.77	6.57	9.35	11.91	14.20	16.18	17.88	19.31	20.51	21.51	22.34	23.02	23.58	24.04
20	5.94	0.32	0.87	1.51	2.20	2.89	3.56	4.21	4.82	5.40	5.94	6.44	6.90	7.32	7.71	8.07
	13.74	0.54	1.80	3.42	5.17	6.92	8.57	10.09	11.46	12.68	13.74	14.67	15.46	16.15	16.74	17.23
	20.52	1.28	3.74	6.56	9.35	11.92	14.22	16.20	17.90	19.33	20.52	21.51	22.33	23.00	23.56	24.01
24	5.94	0.32	0.88	1.52	2.21	2.89	3.57	4.21	4.83	5.40	5.94	6.44	6.90	7.32	7.71	8.06
	13.74	0.53	1.79	3.41	5.16	6.91	8.56	10.09	11.46	12.68	13.74	14.67	15.47	16.15	16.74	17.24
	20.52	1.28	3.75	6.57	9.36	11.93	14.22	16.21	17.90	19.33	20.52	21.51	22.33	23.00	23.55	24.00

允许误差必然会反映到表 1 中来，且有所扩大(曾做过试验)。因此，若排除处理方法所引起的误差(事实上很难做到)，表 1 中的较差定会更小，一般不会影响到第一位小数。就应用而言，可以认为标准年龄的变动，不会引起地位指数曲线形状的变动。而且从(3)式直接分析，按最小二乘法直接求参数 C，无论标准年龄为多少，都必须满足剩余方差和 Q 最小，由此也可以看出，标准年龄不同不会对曲线形状产生很大影响。

四、根据年龄和树高求解地位指数的简便迭代法

当(3)式建立后，将其展开成表，即可应用。但有时为了精确起见，需用实际树高和年龄直接根据(3)式求出指数值 S，这时由于(3)式无法写成显式 $S=f^{-1}(C,H,t)$ 而不能直接解出，因而只能用迭代法解决。这里讨论两种方法。先讨论牛顿切线法。把(3)式写成：

$$y=H-f(C,S,t)=H-\hat{H} \tag{7}$$

则牛顿迭代公式为：

$$S_k=S_{k-1}-y_{k-1}/y'_{k-1} \tag{8}$$

式中 $y_{k-1}=H-f(C,\ S_{k-1},t)=H-\hat{H}_{k-1}$，$y'_{k-1}=\left.\dfrac{dy}{dS}\right|_{S=S_{k-1}}$，$k$ 表示第 k 次迭代。这里需指出的是，若要按(3)式求出精确的表达式是很繁的。但可看出，(3)式中最重要的 S 是 B_0(即 $C_0S^{C_1}$)中的 S，因而求导数时可把其它 S 看作常数。这时有

$$\left.\frac{dy}{dS}\right|_{S=S_{k-1}}=-\left.\frac{df}{dS}\right|_{S=S_{k-1}}=-C_1\hat{H}/S\Big|_{S=S_{k-1}}=-C_1\hat{H}_{k-1}/S_{k-1}$$

将其和(7)式一并代入(8)式有：

$$S_k=S_{k-1}+\frac{(H-\hat{H}_{k-1})\cdot S_{k-1}}{C_1\hat{H}_{k-1}} \tag{9}$$

S_0 可估计给出。导数取近似值并不影响最后求得的 S。当允许误差取0.01 m时，一般迭代 3—5 次即可达到精度要求。

再讨论第二节中提到的方法。把(3)式写成(4)式的形式：

$$S=(A/C_0)^{1/C_1} \tag{10}$$

式中 $A=H(1-e^{-B_1t})^{\frac{1}{B_2-1}}$。将初值 S_0 代入(10)式的右边，求出 S_1，以 S_1 作为新的近似值再代入，求出 S_2，如此重复到 S 达到稳定。这种方法可在SHARPEL-5100S计算器上迅速实现。

五、所建多形地位指数曲线模型的特性分析

(3)式作为地位指数曲线模型，是如何体现多形的。先讨论(1)式，它的一阶、二阶导数为：

$$y'=\frac{B_0B_1}{1-B_2}(1-e^{-B_1t})^{\frac{B_2}{1-B_2}}e^{-B_1t} \tag{11}$$

$$y''=B_1y'\left[\frac{B_2}{1-B_2}(1-e^{-B_1t})^{-1}e^{-B_1t}-1\right] \tag{12}$$

令二阶导数 $y''=0$，解出 t，这个 t 就是拐点年龄。由(12)式可得，拐点处的 t 为

$$t=-\frac{1}{B_1}\ln(1-B_2)=-\frac{1}{B_1(S)}\ln[1-B_2(S)] \tag{13}$$

拐点是体现曲线形状的一个重要特征。由(13)式可以看出，不同的地位指数有不同的拐点。现以南岭山地中段所建立的杉木多形地位指数曲线模型为例进行分析。(3)式的拟合结果为

$C_0=3.520\,67$　　$C_1=0.661\,386\,9$

$C_2=-1.539\,354E-02$　　$C_3=-7.220\,553E-03$

$C_4=1.385\,183E-04$　　$C_5=0.110\,350\,4$

$C_6=5.198\,073E-02$　　$C_7=-1.732\,298E-03$

$S=0.318\,5$　　$R=0.997\,8$

兹计算出不同指数级的 B、拐点及30 a时的树高值列于表2。B 随 S 呈现有规律的变化，其中 B_0 作为各指数级优势高的生长极限值，客观地体现了杉木林分生长的实际情况，B_1 作为速度参数，随地位指数的提高而增加的特性，反映了立地质量越好，其树高生长越快

表2 **不同指数级的曲线特征值**

指数	B_0	B_1	B_2	拐点	H_{30}
6	11.515 54	0.053 730 2	0.359 872 1	8.30	8.13
8	13.928 91	0.064 292 8	0.415 329 2	8.35	10.65
10	16.144 04	0.073 747 2	0.456 927 9	8.28	13.04
12	18.213 01	0.082 093 5	0.484 668 3	8.08	15.32
14	20.167 84	0.089 331 7	0.498 550 3	7.73	17.50
16	22.030 00	0.095 461 7	0.498 573 8	7.23	19.59
18	23.814 75	0.100 483 6	0.484 739	6.60	21.60
20	25.533 45	0.104 397 3	0.457 045 8	5.85	23.52
22	27.194 81	0.107 202 8	0.415 494 2	5.01	25.36

的生物规律。拐点年龄基本上随地位指数的增大而提前，表明了立地质量好的林分，其优势高速生期来得早的生物意义。而30 a 时各指数级曲线的间距，由低指数级(6—8)的2.52 m，递减到高指数级(20—22)的1.84 m。表 2 中各地位指数级的 5 个特征值的差异，以及各自体现的上述规律，充分表明了杉木地位指数曲线的多形性。由于单形曲线是多形的一种特例，因而(3)式同样能表现单形。用(3)式作为拟合地位指数曲线的数学模型是比较理想的。

参 考 文 献

[1] Monserud, R. A., 1984, Height growth and site index curves for inland Douglas-fir based on stem analysis data and forest habitat type, Forest Scie., 30 (4).

[2] Trousdell, K. B. et al., 1974, U. S., Forest Serv., Southeast Forest Exp. Sta.,Res. pap., 115, 11.

A STUDY ON THE ESTABLISHMENT OF POLYMORPHIC SITE INDEX MODEL BY ADOPTING RICHARDS FUNCTION

Luo Qibang　Wu Zhide　Zhang Jusheng　Chen Dingguo

(Central South China Design Institute of Forest Inventory & Planning)

Xiao Yonglin　Ge Hongli

(East China Design Institute of Forest Inventory & Planning)

Abstract Richards function was used as a basic model to study the non-intersection polymorphic site index curve, which solved the problem existed while the height of the tree was not uniform with the site index at standard age in plantations of Chinese fir and Masson pine. A practical site index substitution formula was worked out to get the site index according to the height and age of the tree. The problem that whether site index will chang at different standard age or not was discussed. Finally, a general discussion on properties of the polymorphic site index curve equation for Chinese fir was made.

Key words Richards function; polymorphic site index curve; Marquardt iteration