

两水平非线性混合模型对杉木林优势高生长量研究

符利勇¹, 李永慈², 李春明¹, 唐守正^{1*}

(1. 中国林业科学研究院资源信息研究所,北京 100091; 2. 北京林业大学理学院,北京 100083)

摘要:利用两水平非线性混合模型对杉木(*Cunninghamia lanceolata*)优势高进行分析。概述了两水平非线性混合模型并简单介绍了该模型的参数估计方法;选用了5种常见的Richards和Logistic形式模型作为构建混合模型的基础模型,利用建模数据分别对这些基础模型各自衍生出的19种混合模型进行计算及比较,结果表明:这5种基础模型对应的最佳混合模型分别为模型(3-1)~模型(3-5);最后把这些最佳混合模型及传统的回归模型两两进行比较,结果表明:二水平非线性混合模型拟合效果比传统的回归模型拟合效果要好,并且基础模型4对应的二水平混合模型(式3-4)拟合效果最好。

关键词:两水平非线性混合模型;杉木优势高;回归模型

中图分类号:S791.27

文献标识码:A

Study of the Dominant Height for Chinese Fir Plantation Using Two-Level Nonlinear Mixed Effects Model

FU Li-yong¹, LI Yong-ci², LI Chun-ming¹, TANG Shou-zheng¹

(1. Research Institute of Forest Resource Information Techniques, Chinese Academy of Forestry, Beijing 100091, China;
2. College of Science, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China)

Abstract: Nonlinear mixed effects model (NLMEM) is built on the relationship of the fixed and random effects in the regression function. The NLMEM has an obvious comparative advantage in analyzing the longitudinal data, repeated measures data and multilevel data. Two-level NLMEM is used to analyze the dominant height for Chinese fir (*Cunninghamia lanceolata*). The authors outline the two-level NLMEM and introduce the parameters estimation method of the model. Based on five common Richard and Logistic models, the mixed model is built. The modeling data are used to calculate and compare with 19 models derived from each based model, and 5 optimal mixed models are built. Compared the 5 optimal mixed models with traditional regression models, it is showed that the two-level NLMEM has a better fitting effect than the regression models.

Key words: two-level nonlinear mixed effects model; dominant height; Chinese fir; regression model

非线性混合效应模型(NLMEM)最早是Sheiner和Beal在1980年提出来的,它包含两类参数:固定效应参数和随机效应参数,它是通过回归函数依赖于这两类参数的非线性关系而建立的^[1]。NLMEM在处理纵向数据、多水平数据及重复数据上有着突

出的优势,因此被引入到多门学科,如医学、工学及农学等^[2]。根据随机效应的嵌套个数可以把非线性混合模型分为单水平非线性混合模型、两水平非线性混合模型及多水平非线性混合模型。单水平非线性混合模型是指模型中随机效应不考虑嵌套,所有

收稿日期:2011-03-18

基金项目:国家自然科学基金“基于森林清查数据的乔木林碳储量计算方法研究”(31070485)

作者简介:符利勇(1984—),男,湖南耒阳人,在读博士,研究方向:非线性混合模型算法的研究及其在林业上的运用. E-mail: fulyong840909@163.com.

* 通讯作者:中科院院士,博士生导师. stang@info. forestry. ac. cn.

的随机效应是由1个影响因子产生的非线性混合模型。有2个随机效应嵌套的混合模型称之为两水平非线性混合模型。3个或3个以上随机效应嵌套的非线性混合模型称之为多水平非线性混合模型。在林业上,国外许多学者利用了单水平非线性混合模型来分析树木优势高生长量、断面积及蓄积量等^[3-8],结果表明非线性混合模型比传统的非线性模型精度要高。如对优势高生长量的研究,Fang和Bailey等^[3]利用改进的Richards模型作为基础模型分析了经营措施及样地等2个单水平对美国乔治亚洲的火炬松(*Pinus taeda* Linn.)优势高生长量的影响;Calegario等^[9]利用了3参数的Logistic模型作为基础模型分析了不同的无性繁殖方法对桉树(*Eucalyptus* sp.)优势高生长量的影响;Meng和Huang等^[10]利用改进的线性化算法来分析火炬松优势高与年龄的非线性混合模型函数,该混合模型也是把3参数的Logistic模型作为基础模型,样地作为随机效应因子来建立的。对于考虑两水平及多水平的非线性混合模型来研究优势高生长量的研究比较少见。在国内只有少数几个学者对单水平非线性混合模型进行了研究。如李永慈等^[11]利用线性及非线性混合模型对树高生长进行了分析;李春明等^[12]利用非线性混合模型对杉木(*Cunninghamia lanceolata* (Lamb.) Hook.)优势木平均高进行了研究。而对两水平及多水平非线性混合模型的研究较为少见。

两水平非线性混合模型比单水平非线性混合模型多增加了一个随机效应因子,并且两个随机效应因子之间是相互嵌套的。由于两水平的混合模型把回归模型中的随机误差分解成3部分,分别为:第一水平随机效应因子产生的随机效应、第二水平因子产生的随机效应及随机误差。从而利用二水平非线性混合模型分析时,既能提高精度,又可以分析区组及样地对杉木胸高断面积的影响。因此在实际应用中可通过各自水平的随机效应大小来反映该随机效应因子对优势高的影响程度,由于随机误差项分得更精细,因此也能提高优势高的预测精度。

本文主要目的是介绍两水平非线性混合模型数学理论及其参数的求解方法,并以江西杉木优势高数据作为实例说明如何利用两水平非线性混合模型来分析多水平重复数据。选用5种常见的杉木优势高经验方程作为基础模型来构建两水平非线性混合模型,2个随机效应因子分别为:区组和样地。文中所有计算在S-PLUS2000上实现。

1 两水平的非线性混合模型概述及算法分析

1.1 两水平非线性混合模型

多水平非线性混合模型是指随机效应以嵌套形式出现在模型中的非线性混合模型,简称MNLMEM。MNLMEM模型比单水平混合模型更为复杂,对于两水平的非线性混合模型,模型表达式写为:

$$\begin{cases} y_{ijk} = f(\varphi_{ijk}, v_{ijk}) + \varepsilon_{ijk}, i = 1, \dots, M \\ j = 1, \dots, M_i, k = 1, \dots, n_{ij} \\ \varphi_{ijk} = A_{ijk}\beta + B_{i,jk}b_i + B_{ijk}b_{ij} \\ b_i \sim N(0, \psi_1), b_{ij} \sim N(0, \psi_2) \\ \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \psi_3) \end{cases} \quad (1-1)$$

其中: M 为第一水平因子的分组数, M_i 为第一水平因子第*i*分组数对应的第二水平因子的分组数, n_{ij} 为第一水平因子第*i*分组数对应的第二水平第*j*分组数的重复观测次数。 β 为*p*维的固定效应; b_i 为第一水平因子的随机效应,大小为 q_1 维,假定服从期望为零,方差为 ψ_1 的正态分布; b_{ij} 为第二水平因子的随机效应,大小为 q_2 维,假定服从期望为零,方差为 ψ_2 的正态分布; ε_{ijk} 为第一水平因子第*i*分组第二水平因子第*j*分组对应第*k*次观测时的误差项,假定服从期望为零,方差为 ψ_3 的正态分布, ψ_3 一般取 $\sigma^2 I$; y_{ijk} 为第一水平因子第*i*分组第二水平因子第*j*分组对应第*k*次的相应变量观测值; φ_{ijk} 为回归参数向量,为了计算简单通常与 β 、 b_i 及 b_{ij} 呈线性关系; v_{ijk} 为第一水平因子第*i*分组第二水平因子第*j*分组对应第*k*次的解释变量观测值; A_{ijk} 、 $B_{i,jk}$ 及 B_{ijk} 分别为固定效应 β 、随机效应 b_i 及 b_{ij} 设计矩阵。

$$y_{ij} = \begin{bmatrix} y_{ij1} \\ \vdots \\ y_{ijn_{ij}} \end{bmatrix}, \varphi_{ij} = \begin{bmatrix} \varphi_{ij1} \\ \vdots \\ \varphi_{ijn_{ij}} \end{bmatrix}, \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ij1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ijn_{ij}} \end{bmatrix}, v_{ij} = \begin{bmatrix} v_{ij1} \\ \vdots \\ v_{ijn_{ij}} \end{bmatrix},$$

$$f_{ij}(\varphi_{ij}, v_{ij}) = \begin{bmatrix} f(\varphi_{ij1}, v_{ij1}) \\ \vdots \\ f(\varphi_{ijn_{ij}}, v_{ijn_{ij}}) \end{bmatrix}, A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij1} \\ \vdots \\ A_{ijn_{ij}} \end{bmatrix},$$

$$B_{i,j} = \begin{bmatrix} B_{i,j1} \\ \vdots \\ B_{i,jn_{ij}} \end{bmatrix}, B_{ij} = \begin{bmatrix} B_{ij1} \\ \vdots \\ B_{ijn_{ij}} \end{bmatrix}$$

1.2 两水平非线性混合模型算法分析

与单水平非线性混合模型相似,多水平非线性混合模型也可以运用线性化算法来求解各自参数。

线性化算法主要分为两个步骤PNLS步和LME步,参数的解是由这两个步骤多次交替运算得到。下面简要地介绍这两个步骤,详细算法见文献^[13-15]。

第一步:PNLS步:

给定了随机效应方差及误差项方差各参数值,通过极小化下面罚非线性最小二乘目标函数得到固定效应 β 和随机效应 b_i 的估计值 $\hat{\beta}^{(t)}$ 、 $b_i^{(t)}$ 。

两水平的罚非线性最小二乘目标函数:

$$\sum_{i=1}^M \left\{ \sum_{j=1}^{M_i} \left[\|y_{ij} - f_{ij}(\beta, b_i, b_{ij})\|^2 + \|\Delta_1 b_i\|^2 \right] + \|\Delta_1 b_i\|^2 \right\} \quad (1-2)$$

$$\text{令: } \hat{X}_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial \beta^T} |_{\hat{\beta}, \hat{b}_i, \hat{b}_{ij}}, \hat{Z}_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial b_i^T} |_{\hat{\beta}, \hat{b}_i, \hat{b}_{ij}}, Z_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial b_{ij}^T} |_{\hat{\beta}, \hat{b}_i, \hat{b}_{ij}},$$

$$\hat{w}_{ij} = y_{ij} - f_{ij}(\hat{\beta}, \hat{b}_i, \hat{b}_{ij}) + X_{ij} \hat{\beta} + \hat{Z}_{i,j} b_i + \hat{Z}_{ij} \hat{b}_{ij} \quad (1-3)$$

$$\hat{X}_i = \begin{bmatrix} \hat{X}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{X}_{iM_i} \end{bmatrix}, \hat{Z}_i = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{i,1} \\ \vdots \\ \hat{Z}_{iM_i} \end{bmatrix}, \hat{w}_i = \begin{bmatrix} \hat{w}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{w}_{iM_i} \end{bmatrix}, \quad (1-4)$$

第二步(LME):

在已知 $\hat{\beta}'(\theta)$ 、 $\hat{b}_i'(\theta)$ 情况下,利用EM或Newton-Raphson算法求解下列对数极大似然函数,从而得到各方差中参数 θ' 。

$$\ell_{LME}(\beta, \sigma^2, \Delta_1, \Delta_2 | y) = -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left\{ \log |\Sigma_i(\Delta_1, \Delta_2)| + \sigma^{-2} [w_i - \hat{X}_i \beta]^T \Sigma_i^{-1}(\Delta_1, \Delta_2) [w_i - \hat{X}_i \beta] \right\} \quad (1-5)$$

对于限制极大似然算法,似然函数为:

$$\ell_{LME}^R(\beta, \sigma^2, \Delta_1, \Delta_2 | y) = \ell_{LME}(\beta, \sigma^2, \Delta_1, \Delta_2 | y) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \log |\sigma^{-2} \hat{X}_i^T \Sigma_i^{-1}(\Delta_1, \Delta_2) \hat{X}_i| \quad (1-6)$$

其中

$$\Sigma_i(\Delta_1, \Delta_2) = I + \hat{Z}_i \Delta_1^{-1} \Delta_1^{-T} \hat{Z}_i^T + \bigoplus_{j=1}^{M_i} \hat{Z}_{ij} \Delta_2^{-1} \Delta_2^{-T} \hat{Z}_{ij}^T, \quad \Delta_1 \text{ 和 } \Delta_2 \text{ 分别方差 } \psi_1 \text{ 及 } \psi_2 \text{ 的精度因子,它们满足: } \psi_1^{-1} = \sigma^{-2} \Delta_1^T \Delta_1, \psi_2^{-1} = \sigma^{-2} \Delta_2^T \Delta_2. \quad (1-7)$$

已知参数 $\hat{\theta}$,重新返回到PNLS步,计算新的 $\hat{\beta}$ 和 \hat{b}_i ,重复以上步骤,直到参数收敛为止。

2 材料与方方法

2.1 数据来源

选择了中国林科院林业所设在大岗山实验局的固定样地人工杉木林进行研究。实验地的地理坐标

为 $27^{\circ}30' \sim 27^{\circ}50'N$, $114^{\circ}30' \sim 114^{\circ}45'E$,温暖湿润,属于亚热带季风湿润类型。太阳总辐射年平均为 $486.9 \text{ kJ} \cdot \text{cm}^{-2}$;年均气温在 $15.8 \sim 17.7 \text{ }^{\circ}\text{C}$,年平均降水量为 1591 mm ;该区属于地带性低山丘陵红壤、黄壤类型及其亚类的分布区;根据初植密度不同把杉木分为5个区组,在第5个区组中调查了3个样地部分杉木优势高,其它4个区组分别调查了2个样地,连续调查10年,对应的杉木年龄为3,4,5,6,7,8,9,10,12和14年。从每个样地中选出1株杉木作为检验样本,其它杉木数据用来模型计算。根据建模数据,分别计算出各样地杉木平均优势高。5个区组的初植密度为1667,3333,5000,6667和10000株 $\cdot \text{hm}^{-2}$,样地大小为 0.06 hm^2 。该数据有2个水平,分别为区组和样地,并且它们之间相互嵌套,数据重复调查了10次,因此该数据满足了两水平非线性混合模型数据结构的要求。

2.2 基础模型选择

本文选择了5个常用模型作为构建两水平非线性混合模型的基础模型,分别见式(2-1)~(2-5),其中式(2-1)和式(2-2)为Richards形式模型,式(2-3)和式(2-4)为Logistic形式模型。各自模型中都含有3个参数。

$$HD_{ijk} = \beta_1 [1 - \exp(-\beta_2 age_{ijk})]^{\beta_3} + \varepsilon_{ijk} \quad (2-1)$$

$$HD_{ijk} = \beta_1 \left[\frac{1 - \exp(-\beta_2 age_{ijk})}{1 - \exp(-\beta_2 age_0)} \right]^{\beta_3} + \varepsilon_{ijk} \quad (2-2)$$

$$HD_{ijk} = \frac{\beta_1}{1 + \beta_2 \exp(-\beta_3 age_{ijk})} + \varepsilon_{ijk} \quad (2-3)$$

$$HD_{ijk} = \frac{\beta_1}{1 + \exp[(\beta_2 - age_{ijk})/\beta_3]} + \varepsilon_{ijk} \quad (2-4)$$

$$HD_{ijk} = \frac{\beta_1}{1 + \exp[\beta_2 + \beta_3 \ln(1 + age_{ijk})]} + \varepsilon_{ijk} \quad (2-5)$$

其中: HD_{ijk} :第*i*个区组第*j*个样地对应的第*k*次重复调查时样地的杉木平均优势高; β_1 、 β_2 、 β_3 :分别为模型中未知参数; age_{ijk} :第*i*个区组第*j*个样地对应的第*k*次重复调查时样地的杉木年龄。

2.3 参数估计方法

利用两水平非线性混合模型对杉木优势高生长量进行研究,对应的两个水平效应因子分别为区组和样地。运用的参数估计方法是极大似然法,在计算未知参数时,首先假定随机效应 b_i 、 b_{ij} 及随机误差 ε_{ij} 都服从期望为0,协方差分别为 ψ_1 、 ψ_2 及 ψ_3 的正态分布,并且三者之间相互独立。 ψ_1 、 ψ_2 及 ψ_3 可以为多种特殊结构,如独立等方差、自回归、复合对称等。本文是假定 ψ_1 、 ψ_2 为一般情形, ψ_3 为独立等

方差。通过1.2节中介绍的算法来求解两水平非线性混合模型参数,所有计算在S-PLUS2000的nlme模块上实现。

2.4 最优模型选择及比较

用式(2-1)~(2-5)作为基础模型来构建两水平非线性混合时,由于这些模型中都含有3个参数,因此这5种基础模型分别衍生出了19种两水平非线性混合模型,这些模型各自参数结构见表1。利用指标AIC(Akaike information criteria)及BIC(Bayesian information criteria)的大小对这5种基础模型衍生出的19种混合模型进行比较(这些指标满足“越少越好”的原则),选择最优模型。每一个基础模型对应选出一个最优的两水平混合模型。设 ℓ 为对数极大似然函数, n 为观测总数, d 为模型中固定参数个数,计算公式见式(2-6)和(2-7)。

$$AIC = -2\ell + 2d \quad (2-6)$$

$$BIC = -2\ell + d \times \log(n) \quad (2-7)$$

利用选择出的5种最佳混合模型及相应的回归模型,根据各自模型已计算出的未知参数值,利用公式2-8分别对检验样本的杉木优势高生长量进行预测,同时计算出各自模型的相关指数(R^2)、均方根误差(RMSE)及平均绝对误差(| \bar{E} |)。3个评价指标中,相关指数越大而均方根误差及平均绝对误差越小证明模型拟合精度越高。为了更清楚地比较各自混合模型的效果,笔者还给出了这5种最优混合模型各自的残差分布图。

$$\hat{H}_{ijk} = f(\hat{\varphi}_{ijk}, age_{ijk}) \quad (2-8)$$

式中: \hat{H}_{ijk} 为第*i*个区组中第*j*个样地对应的第*k*次重复调查时样地的杉木平均优势高预测值; $\hat{\varphi}_{ijk}$ 为模型中参数估计值; age_{ijk} 为第*i*个区组中第*j*个样地对应的第*k*次重复调查时样地的杉木年龄。

表1 模型混合参数

模型号	混合参数	模型号	混合参数	模型号	混合参数	模型号	混合参数
1	1,2,3+1,2,3	6	1,2,3+1,3	11	1,3+1,3	16	2,3+3
2	1,2,3+1	7	1,2,3+2,3	12	1,3+1	17	1+1
3	1,2,3+2	8	1,2+1,2	13	1,3+3	18	2+2
4	1,2,3+3	9	1,2+1	14	2,3+2,3	19	3+3
5	1,2,3+1,2	10	1,2+2	15	2,3+2		

注:1表示形参 β_1 ,2表示形参 β_2 ,3表示形参 β_3 ,加号前面的数字代表这些形参考虑第一水平随机效应,加号后面的数字代表这些形参考虑第二水平随机效应。例如: $a, b, c + a$ 表示参数 β_a, β_b 及 β_d 均为混合参数,其中 β_a 考虑两个水平随机效应, β_b, β_c 考虑第一水平随机效应。

3 结果与分析

3.1 最佳模型选择

根据建模数据,对5个基础模型各自衍生出来的19种两水平的非线性混合模型进行计算,为了节省篇幅,不具体列出各自收敛模型的评价指标AIC、BIC及 $\log Lik$ 。计算结果为:基础模型1中有10种衍生出的两水平模型计算收敛,模型号为:8、9、10、11、12、13、15、16、17、18;其中模型序号为11(式3-1)对应的指标AIC=16.6604, BIC=43.6652最小,而 $\log Lik=1.6698$ 最大。基础模型2中,有9种衍生出的两水平混合模型计算收敛,模型序号为:8、11、12、13、15、16、17、18、19;其中模型序号为11(式3-2)对应的指标AIC=16.5839, BIC=43.5887最小,而 $\log Lik=1.7080$ 最大。基础模型3中有12种衍生出的模型计算收敛,这些模型的序号分别为:3、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19;其中模型9(式3-3)对应的指标AIC=-0.9498, BIC=20.6541最小,而 $\log Lik=8.4749$ 最大。基础模型4中有16

种衍生出的模型计算收敛,这些模型的序号分别为:1、2、3、5、6、8、9、10、11、12、13、15、16、17、18、19;其中模型1(式3-4)对应的指标AIC=-0.0494, BIC=43.2571最小,而 $\log Lik=15.9753$ 最大。基础模型5中有13种衍生出的模型计算收敛,模型序号为:4、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19。其中模型8(式3-5)对应的指标AIC=22.5879, BIC=49.5928最小,而 $\log Lik=-1.2940$ 最大。根据评价指标AIC、BIC“越少越好”而 $\log Lik$ “越大越好”原则可得出各自5种基础模型对应的最优两水平混合模型,分别为式(3-1)、式(3-2)、式(3-3)、式(3-4)及式(3-5)。

$$HD_{ijk} = (\beta_1 + u_{li} + u_{lj}) [1 - \exp(-\beta_2 age_{ijk})]^{(\beta_3 + u_{3i} + u_{3j})} + \varepsilon_{ijk} \quad (3-1)$$

$$HD_{ijk} = (\beta_1 + u_{li} + u_{lj}) \left[\frac{1 - \exp(-\beta_2 age_{ijk})}{1 - \exp(-20\beta_2)} \right]^{(\beta_3 + u_{3i} + u_{3j})} + \varepsilon_{ijk} \quad (3-2)$$

$$HD_{ijk} = \frac{\beta_1 + u_{li} + u_{lj}}{1 + (\beta_2 + u_{2i}) \exp(-\beta_3 age_{ijk})} + \varepsilon_{ijk} \quad (3-3)$$

$$HD_{ijk} = \frac{\beta_1 + u_{1i} + u_{1j}}{1 + \exp[(\beta_2 + u_{2i} + u_{2j} - age_{ijk})/(\beta_3 + u_{3i} + u_{3j})]} + \varepsilon_{ijk} \quad (3-4)$$

$$HD_{ijk} = \frac{\beta_1 + u_{1i} + u_{1j}}{1 + \exp[\beta_2 + u_{2i} + u_{2j} + \beta_3 \ln(1 + age_{ijk})]} + \varepsilon_{ijk} \quad (3-5)$$

3.2 参数计算

通过建模数据,利用1.2节介绍的算法分别计算出式(3-1)~式(3-5)中各自的固定效应参数估计值(表2)、第一水平随机效应参数估计值(表3)、第二水平随机效应参数估计值(表4)、方差参数。从表2中可以得出各自模型的固定效应参数估计值对应的P值都小于0.001,因此它们都与真实值相差不显著。表3是这5个模型各自的第一水平随机效应参数估计值,从表中可看出区组1对应的随机效应除3-4式中随机效应 $u_{31}(4)$ 为负值外其它都为正值且最大,而区组4对应的随机效应除3-4式中随机效应 $u_{31}(4)$ 为正值外其它都为负值且最小。表4是这5个模型各自混合参数的第二水平随机效应参数估计值,相对于区组产生的随机效应,表4中各样地间产生的随机效应都非常小。

表2 各模型固定效应参数值

固定效应	模型1	模型2	模型3	模型4	模型5
β_1	14.975 7	14.308 4	13.451 3	13.447 7	16.429 1
β_2	0.175 1	0.174 5	6.545 3	5.207 3	3.818 3
β_3	1.502 7	1.498 2	0.359 7	2.790 2	-1.919 6

模型(3-1)~(3-5)对应的 ψ_1 、 ψ_2 及 ψ_3 分别为:

$$\psi_1(1) = \begin{pmatrix} 2.352 2 & 0.144 3 \\ 0.144 3 & 0.008 9 \end{pmatrix}, \psi_2(1) = \begin{pmatrix} 0.482 9 & 0.026 9 \\ 0.026 9 & 0.001 5 \end{pmatrix},$$

$$\psi_3(1) = 0.035 6 I_{110} \quad (3-6)$$

$$\psi_1(2) = \begin{pmatrix} 2.029 2 & 0.133 6 \\ 0.133 6 & 0.008 8 \end{pmatrix}, \psi_2(2) = \begin{pmatrix} 0.415 4 & 0.024 9 \\ 0.024 9 & 0.001 5 \end{pmatrix},$$

$$\psi_3(2) = 0.035 6 I_{110} \quad (3-7)$$

$$\psi_1(3) = \begin{pmatrix} 1.884 8 & 0.877 7 \\ 0.877 7 & 0.408 7 \end{pmatrix}, \psi_2(3) = \begin{pmatrix} 0.415 4 & 0.024 9 \\ 0.024 9 & 0.001 5 \end{pmatrix},$$

$$\psi_3(3) = 0.035 6 I_{110} \quad (3-8)$$

$$\psi_1(4) = \begin{pmatrix} 0.015 2 & 0.026 8 & -0.008 4 \\ 0.026 8 & 0.048 2 & -0.013 6 \\ -0.008 4 & -0.013 6 & 0.007 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_2(4) = \begin{pmatrix} 0.305 8 & 0.049 5 & -0.015 2 \\ 0.049 5 & 0.010 6 & -0.001 2 \\ -0.015 2 & -0.001 2 & 0.002 9 \end{pmatrix},$$

$$\psi_4(3) = 0.035 6 I_{110} \quad (3-9)$$

$$\psi_1(5) = \begin{pmatrix} 3.813 3 & 0.216 \\ 0.216 & 0.012 2 \end{pmatrix}, \psi_2(5) = \begin{pmatrix} 0.812 3 & 0.040 5 \\ 0.040 5 & 0.002 \end{pmatrix},$$

$$\psi_5(3) = 0.035 6 I_{110} \quad (3-10)$$

表3 第一水平随机效应参数值

随机效应	区组1	区组2	区组3	区组4	区组5
$u_{11}(1)$	2.195 2	0.978 3	-0.179 3	-1.938 2	-1.055 9
$u_{31}(1)$	0.134 7	0.060 0	-0.011 0	-0.118 9	-0.064 8
$u_{11}(2)$	2.035 4	0.911 0	-0.160 6	-1.806 0	-0.979 8
$u_{31}(2)$	0.134 0	0.060 0	-0.010 6	-0.118 9	-0.064 5
$u_{11}(3)$	2.067 1	0.941 1	-0.372 6	-1.737 7	-0.897 8
$u_{21}(3)$	0.962 5	0.438 2	-0.173 5	-0.809 2	-0.418 1
$u_{11}(4)$	1.768 4	0.800 9	-0.203 5	-1.571 5	-0.794 2
$u_{21}(4)$	0.319 4	0.135 3	-0.056 3	-0.276 2	-0.122 2
$u_{31}(4)$	-0.085 9	-0.055 7	-0.025 2	0.090 0	0.076 8
$u_{11}(5)$	2.845 4	1.213 0	-0.335 3	-2.397 2	-1.325 9
$u_{21}(5)$	0.161 1	0.068 7	-0.019 0	-0.135 8	-0.075 1

表4 第二水平随机效应参数值

随机效应	样地1	样地2	样地3	样地4	样地5	样地6	样地7	样地8	样地9	样地10	样地11
$u_{12}(1)$	1.086 2	-0.648 9	0.593 7	-0.450 5	0.512 8	-0.392 1	-0.139 9	-0.296 9	0.107 2	-0.578 5	0.206 9
$u_{32}(1)$	0.060 6	-0.036 2	0.033 1	-0.025 1	0.028 6	-0.021 9	-0.007 8	-0.016 6	0.006 0	-0.032 3	0.011 5
$u_{12}(2)$	1.001 3	-0.599 8	0.552 4	-0.416 7	0.477 3	-0.366 3	-0.129 1	-0.276 5	0.101 9	-0.540 1	0.195 6
$u_{32}(2)$	0.059 9	-0.035 9	0.033 1	-0.024 9	0.028 6	-0.021 9	-0.007 7	-0.016 5	0.006 1	-0.032 3	0.011 7
$u_{12}(3)$	0.601 7	-0.567 5	0.342 5	-0.374 0	0.568 6	-0.102 3	-0.062 2	-0.183 8	0.086 8	-0.431 1	0.121 2
$u_{12}(4)$	0.890 4	-0.507 9	0.466 7	-0.387 7	0.313 2	-0.292 3	-0.101 8	-0.224 7	0.041 1	-0.431 2	0.234 1
$u_{22}(4)$	0.147 9	-0.077 9	0.080 3	-0.061 3	-0.013	-0.039 8	-0.017 4	-0.030 0	-0.023	-0.039 4	0.074 1
$u_{32}(4)$	-0.041	0.029 2	-0.019	0.020 6	-0.071	0.021 3	0.004 3	0.017 0	-0.029	0.049 0	0.021 2
$u_{12}(5)$	1.505 8	-0.872 5	0.724 4	-0.605 8	0.655 0	-0.445 6	-0.174 3	-0.355 9	0.087 6	-0.716 9	0.198 0
$u_{22}(5)$	0.075 1	-0.043 5	0.036 1	-0.030 2	0.032 7	-0.022 2	-0.008 7	-0.017 7	0.004 4	-0.035 7	0.009 9

3.3 回归模型及混合模型间比较

利用建模数据,根据最小二乘回归参数估计方法对模型(2-1)~(2-5)进行拟合,得到各自模型参数 β_1 、 β_2 及 β_3 的估计值见表5。然后利用表2、表3、表4及表5中5种模型各参数估计值,利用公式(2-10),分别计算出混合模型及一般回归模型各自检验样地的优势高,然后分别求出5种模型对应的回归模型及混合模型的相关指数(R^2)、均方根误差(RMSE)及平均绝对误差($|\bar{E}|$)(见表6)。从表6中可看出5种基础模型各自的混合模型对应的相关指数 R^2 比回归模型要大而RMSE及 $|\bar{E}|$ 比回归模型要小,因此可以得出混合模型拟合的效果要比回归模型效果好,这结论与李春明的研究相一

致。对于这5中基础模型中,其中模型4对应的混合模型(式3-4)的相关指数 $R^2 = 0.9976$,比另外4种基础模型的混合模型要大,而RMSE及 $|\bar{E}|$ 比它们要小,从而得知式(3-4)在预测树木优势高时精确度最高,为最佳两水平混合模型。图1~5为5种基础模型各自混合模型预测残差分布图,其中图4的散点分布较均匀,主要集中在区间 $[-0.2, 0.2]$,进一步证实的了式(3-4)比另外几种混合模型要好。

表5 回归模型参数值

参数	模型1	模型2	模型3	模型4	模型5
β_1	14.962 5	14.254 2	13.386 0	13.386 0	16.476 9
β_2	0.171 8	0.171 8	6.487 2	5.228 3	3.785 2
β_3	1.482 5	1.482 5	0.357 6	2.796 2	-1.887 3

表6 回归模型及混合模型评价指标

指标	模型1		模型2		模型3		模型4		模型5	
	回归	混合	回归	混合	回归	混合	回归	混合	回归	混合
R^2	0.920 8	0.995 9	0.920 8	0.995 7	0.921 8	0.988 0	0.921 8	0.997 6	0.920 8	0.995 7
RMSE	0.835 4	0.164 8	0.835 4	0.168 3	0.830 5	0.282 6	0.830 5	0.127 2	0.835 5	0.169 8
$ \bar{E} $	0.627 8	0.121 0	0.627 8	0.122 6	0.634 9	0.161 7	0.634 9	0.094 0	0.627 7	0.124 3

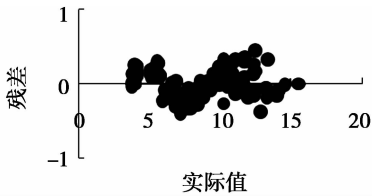


图1 模型1 残差分布图

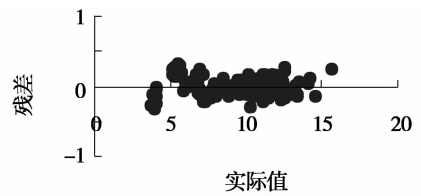


图4 模型4 残差分布图

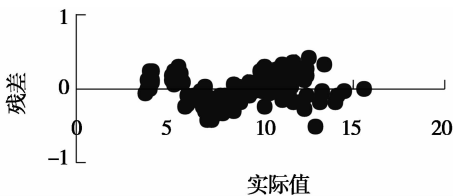


图2 模型2 残差分布图

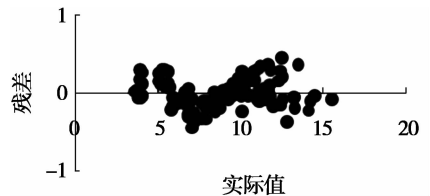


图5 模型5 残差分布图

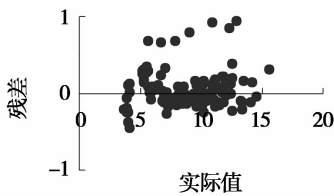


图3 模型3 残差分布图

4 结论

本文利用两水平非线性混合模型对杉木优势高进行分析,产生两类随机效应的因子分别是区组和

样地。首先简要地阐述了求解两水平非线性混合模型参数的算法,然后利用线性混合模型理论求解各自的参数,详细算法见参考文献^[16]。在国外,一些学者^[17-18]也利用 Laplacian 估计法及 Adaptive Gaussian 估计法来求解单水平非线性混合模型,同样这些方法也可以用来求解多水平非线性混合模型,这需进一步研究。

与一般的非线性回归模型不同,两水平混合模型考虑了不同区组及样地对杉木优势高的影响,把随机误差分解成3部分,分别为:区组产生的随机效应 u_1 、样地产生的随机效应 u_2 ,随机误差 ε 。通过

u_1 的值可以分析区组对杉木优势高的影响。表 3 是 5 个模型式(3-1)~式(3-5)中各自的第一水平随机效应参数估计值,由于这些随机效应都是由区组产生的,因此它们的值可以反应出各自区组对杉木优势高的影响程度。区组 1 对应的随机效应除 3-4 式中随机效应 $u_{31}(4)$ 为负值外其它都为正值且最大,而区组 4 对应的随机效应除 3-4 式中随机效应 $u_{31}(4)$ 为正值外其它都为负值且最小。从而得到区组 1 中杉木的优势高生长量速度最快,而区组 4 中杉木的优势高生长量最慢。而各区组是以杉木的初值密度进行划分的,因此区组 1 中的杉木初值密度最适合杉木优势高生长。在区组 1 中 $u_{31}(4)$ 为负值的主要原因是由于式(3-4)中杉木优势高与固定效应 β_4 呈负相关而引起的。根据表 4 中随机效应的值可以评价出各样地对杉木优势高的影响。由于样地 1、样地 3、样地 5、样地 9、样地 11 中各自的随机效应为正值,因此这些样地有利于杉木优势高生长,而其它样地与杉木优势高呈负相关。

本文利用了 5 种基础模型式(2-1)~式(2-5)来构建两水平非线性混合模型对杉木优势高生长量进行分析,这 5 种基础模型都可以衍生出 19 种不同情况的两水平非线性混合模型。通过对 5 种基础模型各自衍生出来的 19 种非线性混合模型进行计算及比较,最后得出了这 5 种基础模型各自对应的最佳二水平非线性混合模型,见式(3-1)~式(3-5)。然后利用检验样本,分别对这 5 种最佳混合模型与它们各自的回归模型进行了比较,结果为混合模型的拟合效果好。同时还对这 5 种最佳混合模型进行比较,结果为基础模型 4 对应的最佳混合模型(3-4)拟合效果最好。而模型(3-1)~模型(3-5)中各自的评价指标 AIC 和 BIC 分别为:16.660 4, 43.665 2;16.583 9, 43.588 7;19.549 2, 41.153 1; 0.049 4, 43.257 1;22.587 9, 49.592 8, 根据“越少越好”的原则确定模型(3-4)拟合效果最好,这与前面比较结果相一致。模型(3-4)拟合效果最好可能与模型中 3 个参数全为混合参数相联系。

本文中是假定两个水平之间的随机效应及随机误差之间相互独立,两种随机效应方差 ψ_1 、 ψ_2 为无特殊结构方差,随机效应方差 ψ_3 为独立等方差。而在混合模型中,随机效应的方差通常可以有多种结构,如:Scaled Identity、AR(1)、ARMA(1,1)、CS、Toeplitz 等,这些还需要进一步研究。

参考文献:

- [1] Sheiner L B, Beal S L. Evaluation of methods for estimating population pharmacokinetic parameters. I. michaelis-menton model routine clinical pharmacokinetic data[J]. Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics, 1980, 8:553-571
- [2] Chen Z. The full EM algorithm for the MLEs of QTL effects and positions and their estimated variances in multiple interval mapping[J]. Biometrics 2005, 61: 474-480
- [3] Fang Z, Bailey R L. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments [J]. Forest Science, 2001, 47:287-300
- [4] Budhathoki C B, Lynch T B, Guldin J M. Nonlinear mixed modeling of basal area growth for shortleaf pine[J]. Forest Science, 2008, 255:3440-3446
- [5] Jordan L, Daniels R F, Clark A, et al. Multilevel Nonlinear Mixed-effects Models for the modeling of earlywood and latewood microfibril angle[J]. Forest Science, 2005, 51:357-371
- [6] Hall D B, Bailey R L. Modeling and prediction of forest growth variables based on multilevel nonlinear mixed models [J]. For Sci, 2001, 47:311-321
- [7] Lappi J. A longitudinal analysis of height/diameter curves[J]. For Sci, 1997, 43:555-570
- [8] Sharma M, Parton J. Height-diameter equations for boreal tree species in Ontario using a mixed-effects modeling approach[J]. For Ecol Manag, 2007, 249: 187-198
- [9] Calegario N, Daniels R F, Maestri R, et al. Modeling dominant height growth based on nonlinear mixed-effects model: a clonal eucalyptus plantation case study [J]. Forest Ecology and Management, 2005, 204: 11-21
- [10] Shawn X Meng, Shongming Huang. Improved calibration of Nonlinear Mixed-Effects Models demonstrated on a height growth function [J]. For Sci, 2009, 55: 238-248
- [11] 李永慈,唐守正. 用 Mixed 和 Nlmixed 过程建立混合生长模型 [J]. 林业科学研究, 2004, 17(3):297-283
- [12] 李春明,张会儒. 利用非线性混合模型模拟杉木林优势木平均高[J]. 林业科学, 2010, 46(3):89-95
- [13] Kuhn E, Lavielle M. Maximum likelihood estimation in nonlinear mixed effects models[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2005, 49: 1020-103
- [14] Vonesh E F, Wang H, Nie L, et al. Conditional second-order generalized estimating equations for generalized linear and nonlinear mixed-effects models[J]. J Am Stat Assoc, 2002, 97: 271-283
- [15] Wolfinger R D, Lin X. Two Taylor-series approximation methods for nonlinear mixed models[J]. Comput Statist Data Anal, 1997, 25:465-490
- [16] Pinheiro J, Bates D M. Mixed Effects Models in S and S-PLUS. Statistics and Computing[M]. Springer, New York, 2000
- [17] By Russ, Wolfinger. Laplace's approximation for nonlinear mixed models[J]. Biometrika, 1993, 80: 791-195
- [18] Vonesh E F. A note on the use of Laplace's approximation for nonlinear mixed-effects models[J]. Biometrika, 1996, 83: 447-462